

# Un elemento di trave in cemento armato con interazione M-N-V secondo il modello Dual Section.

Paolo Tortolini, Marco Petrangeli<sup>1</sup>, Enrico Spacone<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dipartimento di Ingegneria, Università "G.D'Annunzio", Pescara, Italia.*

*E-mail: paolo.tortolini@integer.it, espacone@unich.it, marco@integer.it.*

*Keywords:* Taglio, dual section, trave a fibre, microplane, cemento armato, analisi non lineare.

**SOMMARIO.** L'articolo descrive un elemento finito con interazione completa delle tre caratteristiche di sollecitazione (momento, taglio e sforzo normale) per analisi non lineare di telai piani in cemento armato. L'introduzione del comportamento tagliante nella risposta del calcestruzzo si basa su un approccio che coinvolge l'equilibrio tra le forze di taglio-scorrimento, valutate nella porzione di trave compresa tra due sezioni contigue, e le forze normali scambiate tra le stesse sezioni (*Dual Section, DS*). A seguire la formulazione matematica dell'elemento, il modello viene verificato attraverso alcune prove sperimentali di colonne in cemento armato che hanno messo in evidenza un comportamento *shear sensitive*. Le risposte fornite dal modello numerico, risultano in buon accordo con quelle sperimentali. La trave a fibre *DS* evidenzia la capacità di rappresentare la fragilità del meccanismo di rottura per taglio. Le resistenze di picco e quelle residue vengono individuate con buona approssimazione, così come le deformazioni dell'elemento a rottura.

## 1 INTRODUZIONE

Nel vasto panorama di modelli di travi/colonne non lineari in cemento armato, l'interazione della risposta tagliante con quella di presso/tenso-flessione risulta una caratteristica non comune, sebbene sia evidente come, in presenza di determinate configurazioni geometriche, questo aspetto non possa essere trascurato o trattato separatamente.

Dalla letteratura possiamo individuare almeno tre diversi modelli per la trave con taglio in campo non lineare (dei quali una completa ed interessante presentazione è contenuta in [2]):

- modelli che utilizzano schemi di tirante puntone [5-6], [12];
- modelli che utilizzano legami di fibra di tipo microplane [10];
- modelli che utilizzano legami di fibra MCTF o smeared crack [3], [4], [17].

L'elemento qui illustrato si inquadra nel secondo filone. Esso nasce nell'ambito degli studi di meccanica computazionale sviluppati dalla scuola romana negli anni '90. L'algoritmo di elemento con approccio in forze si basa, infatti, su soluzioni iterative sviluppate da Spacone et al. [13] e Petrangeli e Ciampi [9], mentre l'impostazione generale del problema del taglio si deve a Petrangeli et al. [10]. Questo modello rappresenta un'evoluzione dell'analoga trave di Petrangeli et al. [10], con cui condivide le principali caratteristiche. Tuttavia, se ne differenzia per l'impostazione statica data al problema dell'individuazione della distribuzione delle deformazioni di taglio di fibra (*Dual Section*), che nel già citato modello è, al contrario, di tipo cinematico. Tale nuovo approccio risulta dal punto di vista teorico più corretto, in quanto vengono garantite le condizioni di congruenza e di equilibrio tra il livello sezionale e quello interno di fibra.

## 2 L'ELEMENTO FINITO

La trave è caratterizzata da tre livelli annidati che, secondo un ordine decrescente, sono: Elemento - Sezione - Fibra.

A livello di fibra sono contenute le leggi costitutive del materiale (acciaio e calcestruzzo), mentre la sezione rappresenta il campo di integrazione delle risposte delle fibre, attraverso cui si ottengono le caratteristiche di sollecitazione (M,N,V). L'integrazione delle risposte di sezione conduce alla definizione delle forze nodali, che rappresentano il punto di arrivo dell'algoritmo dell'elemento, il cui dato di input sono gli spostamenti nodali imposti (*state determination*).

### 2.1 State determination di elemento

Studiando la condizione isostatica della trave piana (depurata dai moti rigidi), le deformazioni da considerare per l'elemento sono: l'accorciamento (o allungamento) e le due rotazioni alle estremità. Il vettore che racchiude tali grandezze è definito vettore delle deformazioni di elemento:

$$Q = (\varepsilon; r_i; r_j)^T \quad (1)$$

Mentre le forze nodali corrispondenti, sono racchiuse nel vettore:

$$P = (N; M_i; M_j)^T \quad (2)$$

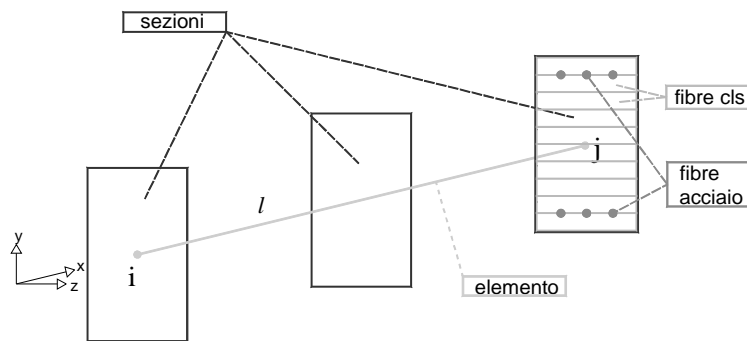


Figura 1. Definizione di elemento di trave 2D

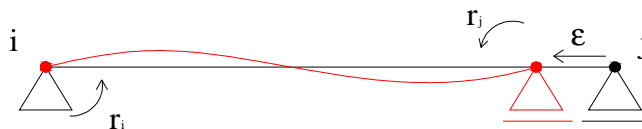


Figura 2. Configurazione isostatica principale della trave piana e sua cinematica

La deformazione assiale, la curvatura e la deformazione tagliante di sezione,  $(x)$ , sono rappresentate nel vettore delle deformazioni generalizzate:

$$q(x) = (\varepsilon; \varphi(x); \gamma(x))^T \quad (3)$$

a cui corrisponde il vettore delle sollecitazioni generalizzate di sezione:

$$p(x) = (N(x); M(x); V(x))^T \quad (4)$$

Esiste una correlazione esatta tra il vettore delle forze nodali e quello delle sollecitazioni di sezione:

$$p(x) = b(x) \cdot P \quad (5)$$

dove  $b(x)$  è una matrice che racchiude le funzioni di forma della sollecitazioni lungo l'elemento, chiamate anche integrali di equilibrio, in quanto sono ottenute esclusivamente dalle condizioni di equilibrio della trave.

Mentre la relazione che intercorre tra le deformazioni nodali e quelle generalizzate di sezione si ricava applicando il Principio dei Lavori Virtuali (PLV):

$$Q = \int_l b(x)^T q(x) dl \quad (6)$$

Inoltre, la relazione che lega le sollecitazioni di sezione alle deformazioni generalizzate può essere scritta in forma esplicita (legame sezionale), grazie ai legami di fibra (anch'essi espliciti):

$$p(x) = p(q(x)) \quad (7)$$

La relazione inversa, al contrario, può essere espressa in forma incrementale, tramite la matrice di flessibilità della sezione  $f(x)$ :

$$dq(x) = f(x) \cdot dp(x) \quad (8)$$

La trattazione del problema della ricerca delle forze nodali associate ad deformazioni di elemento imposte, di seguito presentata, risulta una parziale rivisitazione di quella fornita in [9].

Dato un incremento di deformazioni di elemento  $\Delta Q$ , il corrispondente incremento del campo di sezione è ottenuto tramite una soluzione particolare  $\Delta q_0(x)$ , quindi tale che:

$$\Delta Q = \int_l b(x)^T \Delta q_0(x) dl$$

corretta da una serie di funzioni omogenee,  $rq_i(x)$ :

$$\Delta q_i(x) = \Delta q_0(x) + \sum_i rq_i(x) \quad (9)$$

Le correzioni da applicare sono derivate dalla divergenza tra le sollecitazioni generalizzate generate dal legame sezionale  $\Delta p_{i-1}(x) = \Delta p(\Delta q_{i-1}(x))$ , ottenute da un campo di deformazioni non esatto, e le sollecitazioni derivanti dall'equilibrio della trave  $\Delta p_i(x) = b(x)\Delta P$ :

$$rp_i(x) = \Delta p_i(x) - \Delta p_{i-1}(x) \quad (10)$$

$$rq_i(x) = f(x)(\Delta p_i(x) - \Delta p_{i-1}(x)) \quad (11)$$

La condizione di omogeneità di questi termini correttivi,

$$\bar{0} = \int_l b(x)^T rq_i(x) dl$$

implica che:

$$\Delta P_i = F^{-1} \int_l b(x)^T f(x) \Delta p_{i-1}(x) dx \quad (12)$$

con  $F$  matrice di rigidezza di elemento:

$$F = \int_l b(x)^T f(x) b(x) dx \quad (13)$$

Si nota dalla (12) come le forze nodali della  $i$ -esima iterazione sono esclusivamente dipendenti dall'iterazione precedente.

Il processo di correzione iterativo può essere interrotto, ovvero è raggiunta la convergenza, quando la differenza valutata tramite la (10) e mediata sull'intero elemento, è ritenuta accettabile:

$$\int_l rp_i^T f(x) rp_i dx \leq E_{\lim} \quad (14)$$

E' possibile lavorare con vettori totali piuttosto che incrementali, infatti, tutte le relazioni precedenti risultano ugualmente valide e l'algoritmo si rivela più vantaggioso, sia perché i residui tra un passo di carico ed il successivo vengono ereditati dal nuovo passo, sia perché i legami costitutivi di fibra, che determinano le relazioni deformazioni-sollecitazioni generalizzate di sezione, lavorano con grandezze totali. Una descrizione visiva del procedimento della *state determination* è riportato in figura 3.

## 2.2 State determination di sezione

La sezione è l'entità intermedia tra la trave e le fibre. Qui vengono integrate le risposte delle fibre, ottenendo le sollecitazioni generalizzate di sezione ( $N(x), M(x), V(x)$ ). Si distinguono fibre di acciaio e fibre di calcestruzzo, caratterizzate dalla rispettiva area e posizione rispetto al riferimento della sezione.

Nell'ipotesi di geometria delle sezioni ed armature costanti lungo l'elemento è possibile eliminare la dipendenza di tali termini dalla sezione ( $x$ ):

$$\begin{aligned} A_{xx,j}^s & y_j^s & j = 1 \dots n_{fs} \\ A_{xx,k}^c & y_k^c & k = 1 \dots n_{fc} \end{aligned}$$

dove l'apice  $s/c$  indica il tipo di fibra ( $s=steel$ ,  $c=concrete$ ), mentre il pedice  $k/j$  identifica la fibra. Inoltre, è necessario collegare alle fibre di calcestruzzo un'area in direzione trasversale,  $y$ :

$$A_{yy,k}^c \quad k = 1 \dots n_{fc}$$

ed una percentuale di armatura trasversale ad essa associata (fig. 4):

$$\rho_{yy,k} = A_{yy,k}^s / A_{yy,k}^c \quad k = 1 \dots n_{fc}$$

La fibra di acciaio possiede un comportamento esclusivamente uniassiale (lungo l'asse della trave), ad essa è associato il legame costitutivo elato-plastico incrudente proposto in [8]:

$$\sigma_{xx}^s = f(\varepsilon_{xx}^s) \quad (15)$$

Alla fibra di calcestruzzo è associato un legame costitutivo piano:

$$(\sigma_{xx}^c; \sigma_{yy}^c; \tau_{xy}^c) = D(\varepsilon_{xx}^c; \varepsilon_{yy}^c; \varepsilon_{xy}^c) \quad (16)$$

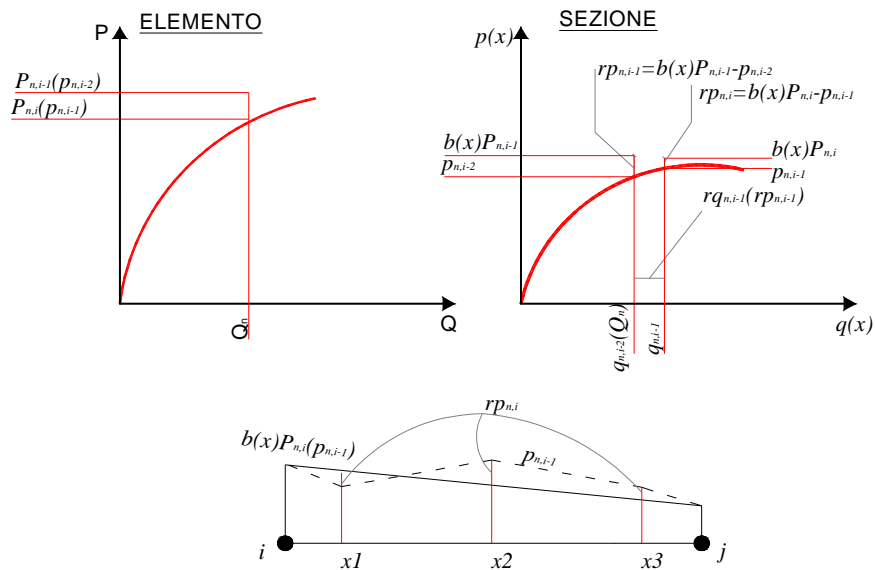


Figura 3. State determination di elemento

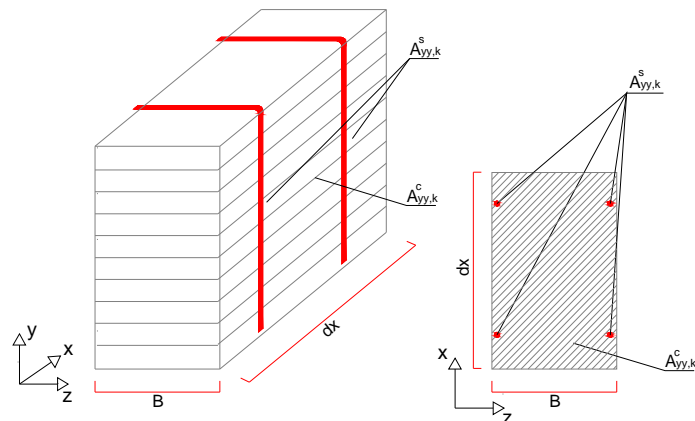


Figura 4. Definizione delle aree laterali di fibra.

Le deformazioni di fibra sono ricavate da quelle di sezione. La deformazione assiale (dell'acciaio e del calcestruzzo) viene ottenuta a partire dall'ipotesi di sezioni piane e perfetta aderenza:

$$\varepsilon_{xx,j}^s(x) = \varepsilon - \varphi(x) \cdot y_j^s \quad j = 1 \dots n_{fs} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{xx,k}^c(x) = \varepsilon - \varphi(x) \cdot y_k^c \quad k = 1 \dots n_{fc} \quad (18)$$

La deformazione laterale del calcestruzzo viene ricavata imponendo l'equilibrio tra l'azione, in tale direzione, associata al calcestruzzo e quella opposta dall'armatura laterale (che utilizza un legame elastico perfettamente plastico):

$$\sigma_{yy,k}^c + \rho_{yy,k} \cdot \sigma_{yy,k}^s(\varepsilon_{yy,k}^c(x)) = 0 \quad (19)$$

La ricerca della deformazione laterale, soluzione della (19), prevede un processo iterativo (iterazioni di fibra). Partendo da una soluzione di tentativo, individuata nel comportamento elastico lineare isotropo del calcestruzzo, vengono aggiunti dei termini correttivi derivati dal non soddisfacimento della (19):

$$\varepsilon_{yy,k}^c = v\varepsilon_{xx,k}^c + r\varepsilon_{yy,k}^{c,1} + \dots + r\varepsilon_{yy,k}^{c,i} \quad (20)$$

Infine, la deformazione di taglio delle fibre di calcestruzzo viene ricavata attraverso una considerazione, statica proposta in [17], procedura che è nota con il nome di *Dual Section (DS)*. Come è noto dalla statica della trave ogni variazione di momento flettente genera delle sollecitazioni di taglio:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (21)$$

Attraverso tale relazione è possibile individuare la distribuzione esatta delle tensioni tangenziali di fibra sulla sezione, considerando che la variazione di momento è legata ad una variazione della distribuzione delle tensioni assiali tra due sezioni adiacenti,  $n$  e  $n+1$ , (da qui il nome *Dual Section*). Infatti, individuata una porzione di sezione, la variazione dell'azione normale agente su di essa, valutata tra due sezioni adiacenti, risulta pari alla forza di scorrimento scambiata a livello di fibra:

$$F_{xy,k} = \left( F_{xx,l-k}^c(x_{n+1}) + F_{xx,l-k}^s(x_{n+1}) \right) - \left( F_{xx,l-k}^c(x_n) + F_{xx,l-k}^s(x_n) \right) \quad (22)$$

dove con i termini  $F_{xx,l-k}^c$  e  $F_{xx,l-k}^s$  si indicano le risultanti degli sforzi assiali, valutate sulla porzione di sezione individuata dalla  $k$ -esima fibra di calcestruzzo, come chiarito in figura 5. Dunque, riscrivendo la (22) in termini tensionali, si ricava la tensione tangenziale della  $k$ -esima fibra:

$$\tau_{xy,k}^c /_{DS} = \frac{\sum_l^k \sigma_{xx,k}^c(x_{n+1}) A_{xx,k}^c - \sum_l^k \sigma_{xx,k}^s(x_{n+1}) A_{xx,k}^s}{B \cdot (x_{n+1} - x_n)} - \frac{\sum_l^k \sigma_{xx,k}^c(x_n) A_{xx,k}^c - \sum_l^k \sigma_{xx,k}^s(x_n) A_{xx,k}^s}{B \cdot (x_{n+1} - x_n)} \quad (23)$$

dove  $B$  rappresenta la base della sezione (rettangolare e costante lungo l'elemento).

In generale, la distribuzione delle tensioni tangenziali lungo la sezione, ottenuta a partire da una distribuzione di deformazioni taglianti non esatta (ad esempio utilizzando delle funzioni di forma prestabilite), non risulta in equilibrio con quella ottenuta tramite la (23):

$$\tau_{xy,k}^c(x) - \tau_{xy,k}^c \Big|_{DS} = r \tau_{xy,k}^c \quad (24)$$

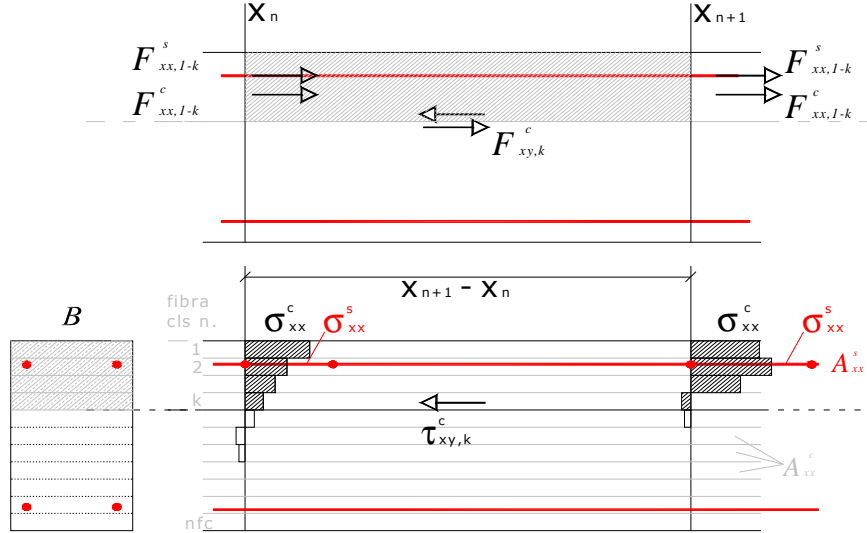


Figura 5. Forza di scorrimento e tensione tangenziale di fibra, determinate dallo scambio di azioni longitudinali tra due sezioni adiacenti (*Dual Section*)

Quindi è necessario correggere la distribuzione ipotizzata per minimizzare la divergenza. Anche in questo caso, la procedura è iterativa. Tuttavia, diversamente da quanto accade per la deformazione laterale di fibra, non è possibile applicare esclusivamente i residui in deformazione derivati dalla (24). Infatti in questo caso è indispensabile garantire la congruenza con il campo di deformazione sezionale, che è espressa da:

$$\gamma(x) = \frac{\sum_{k=1}^{nfc} \varepsilon_{xy,k}^c(x) A_{xx,k}^c}{\sum_{k=1}^{nfc} A_{xx,k}^c} \quad (25)$$

Pertanto la deformazione tangenziale di fibra corretta viene individuata attraverso:

$$\varepsilon_{xy,k}^c = \varepsilon_{xy,k}^{c0} + \left( r \varepsilon_{xy,k}^{c1} - g(y_k) R_\gamma^1(x) \right) + \dots + \left( r \varepsilon_{xy,k}^{ci} - g(y_k) R_\gamma^i(x) \right) \quad (26)$$

dove  $\varepsilon_{xy,k}^{c0} = g(y_k) \gamma(x)$  risulta il termine particolare, valutato secondo una distribuzione iniziale (di tentativo), mentre  $\left( r \varepsilon_{xy,k}^{ci} - g(y_k) R_\gamma^i(x) \right)$  rappresentano dei termini di correzione omogenei,

cioè tali che:

$$\frac{\sum_{k=1}^{nfc} (r\mathcal{E}_{xy,k}^{c,i} - g(y_k)R_\gamma^i(x))A_{xx,k}^c}{\sum_{k=1}^{nfc} A_{xx,k}^c} = 0$$

con  $g(y_k)$  funzione di forma della distribuzione delle deformazioni di taglio sulla sezione, utilizzata per dare avvio al processo iterativo.

La procedura iterativa termina una volta raggiunta un'accettabile convergenza, valutata integralmente sulla sezione:

$$\sum_{k=1}^{nfc} (\tau_{xy,k}^{c,i} - \tau_{xy,k}^{c,i} |_{DS}) A_{xx,k}^c = R_\tau \leq S_{\text{lim}} \quad (27)$$

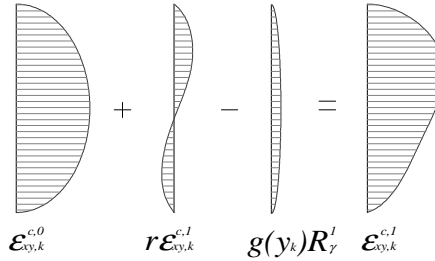


Figura 6. Deformazioni taglianti di fibra sulla sezione

Questa procedura iterativa non può essere effettuata fibra per fibra (come invece avviene per la correzione delle deformazioni laterali  $r\mathcal{E}_{yy}$ ), ma risulta necessario conoscere i residui su tutta la sezione per effettuare la correzione omogenea (si deve valutare il termine integrale  $R_\tau$ ). Quindi, la procedura può essere effettuata solo richiamando la sezione (iterazioni di sezione) e quindi introducendo un nuovo ciclo annidato, che si posiziona intermedio tra le iterazioni di elemento e quelle fibra.

Una volta noti i vettori delle deformazioni di fibra è possibile, attraverso i legami costitutivi (15) e (16), ricavare le risposte in termini tensionali. Infine, le sollecitazioni generalizzate vengono ottenute attraverso la sommatoria delle risposte di fibra, concludendo così il processo di associazione del campo di sollecitazioni generalizzate al dato campo di deformazioni di sezione, chiamato *state determination* di sezione.

$$N(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \sigma_{xx,k}^c(x) A_{xx,k}^c + \sum_{j=1}^{nfs} \sigma_{xx,j}^s(x) A_{xx,j}^s \quad (28)$$

$$M(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \sigma_{xx,k}^c(x) A_{xx,k}^c y_k^c + \sum_{j=1}^{nfs} \sigma_{xx,j}^s(x) A_{xx,j}^s y_j^s \quad (29)$$

$$V(x) = \sum_{k=1}^{nfc} \tau_{xy,k}^c(x) A_{xx,k}^c \quad (30)$$



### 2.3 Il legame costitutivo del calcestruzzo

Il legame costitutivo del calcestruzzo è bidimensionale, (16). Tale modello è stato oggetto di trattazioni specifiche da parte degli stessi autori, [10], [15-16], alle quali si rimanda per maggiori approfondimenti, di seguito viene fornita solo una descrizione sintetica delle principali caratteristiche del modello.

Il legame costitutivo si basa sulla teoria *microplane* [1], secondo cui il comportamento di un materiale (nel piano o nello spazio) viene rappresentato attraverso un insieme di superfici (i micropiani), dove sono definite delle leggi costitutive tensione - deformazione esplicite. Il comportamento globale (macroscopico) viene ottenuto attraverso i contributi dei micropiani. Tradizionalmente tali modelli sono basati su vincoli cinematici, i quali permettono di definire le deformazioni di micropiano ( $e_{k,i}$ ) dal vettore delle deformazioni macroscopiche ( $\bar{\epsilon}$ ) attraverso relazioni esclusivamente geometriche. L'operatore  $A_{k,i}$ , funzione dell'orientazione della giacitura, applicato al vettore macroscopico fornisce le due componenti  $i$  di deformazione di micropiano  $k$  (una normale ed una tangenziale nel caso bidimensionale):

$$e_{k,i} = A_{k,i}^T \bar{\epsilon} \quad i=1,2,3 \quad (31)$$

La relazione tra le tensioni di micropiano e quelle macroscopiche è definita grazie al PLV, attraverso il quale il lavoro (sul cerchio C di raggio unitario) svolto a livello microscopico è uguagliato a quello condotto a livello macroscopico:

$$\frac{1}{2\pi} \int_C (d\bar{s} \cdot \delta\bar{\epsilon}) dS = d\bar{\sigma} \cdot \delta\bar{\epsilon} \quad (32)$$

dove termini a sinistra delle (32) sono riferiti alla microscala mentre quelli a destra alla macroscala. Tuttavia, l'uguaglianza è solo approssimata, a causa dell'imposizione cinematica della (31),[1].

Il modello adottato, grazie ad alcune ipotesi di partenza vantaggiose, supera i principali ostacoli dei modelli classici, che sono individuabili nella difficoltà di ottenere una corretta simulazione del comportamento del calcestruzzo sia a trazione che a compressione con un unico set di parametri di micropiano. La risposta del calcestruzzo viene considerata composta da due contributi, uno elastico-lineare ed uno non lineare, determinata dalla sostanziale eterogeneità del materiale (composto da aggregato e pasta di cemento):

$$\bar{\epsilon}^c = \bar{\epsilon}_{strong}^c + \bar{\epsilon}_{weak}^c \quad (30)$$

Questa scomposizione cinematica (*weak & strong splitting*) è governata dal degrado del materiale, considerato tramite gli invarianti dello stato deformativo (volumetrico,  $\epsilon_V$ , e deviatorico,  $\epsilon_D$ ) ed i parametri deformativi caratteristici del materiale (deformazioni al picco di trazione  $\epsilon_{ct}$ , e di compressione,  $\epsilon_{cc}$ ).

$$\bar{\epsilon}_{strong}^c = \Psi_{split}(\epsilon_V; \epsilon_D; \epsilon_{ct}; \epsilon_{cc}) \cdot \bar{\epsilon}^c \quad (31)$$

In questa maniera è possibile fornire una rappresentazione realistica della risposta del materiale, nelle più diverse situazioni [15-16], considerando esclusivamente la componente ortogonale al micropiano ed utilizzando consolidate leggi tensione-deformazione del calcestruzzo [7].

### 3 TEST NUMERICI

Con lo scopo di verificare le capacità del modello di trave a fibre con taglio  $DS$ , è stata condotta una campagna di simulazioni numeriche sulla base di dati sperimentali reperiti in letteratura. Sono state individuate alcune colonne che, per le proprie caratteristiche geometriche e/o dei materiali, hanno mostrato un comportamento *shear sensitive*.

Un primo gruppo di elementi è stato individuato nell'ambito di un progetto di ricerca volto a verificare i benefici dell'incamiciatura in acciaio di colonne in cemento armato soggette a rotture fragili per taglio. La sperimentazione, svolta presso i laboratori dell'Università di San Diego, ha interessato tre provini (in scala 1 a 3) "*as built*" rappresentativi di pile da ponte realizzate con materiali e pratiche costruttive tipici della California degli anni '60 e tre identici rinforzati con incamiciatura metallica [18].

Il secondo gruppo di colonne è stato, invece, estratto dal database PEER (Pacific Earthquake Engineering Research Center), che rappresenta un ricchissimo archivio di prove sperimentali su travi/pilastrini in cemento armato (oltre 400), messo a disposizione dei ricercatori di tutto il mondo (è liberamente consultabile dal sito: <http://nisee.berkeley.edu/spd/>) [19-20]. Sono state individuate due colonne testate in Giappone [21], che presentano delle sollecitazioni assiali elevate.

#### 3.1 Le colonne di San Diego

Le simulazioni numeriche, condotte sui provini "*as built*", sono state oggetto di un'estesa trattazione in [16], in questa sede vengono riportati i risultati più significativi di due colonne (R-1 e R-5). I due provini hanno medesima sezione 16" x 24" (410 mm x 610 mm) ed armatura costante lungo l'altezza, costituita da 22 barre size 6 ( $\phi=19.05\text{mm}$ ), mentre le staffe (a due braccia con piegatura a 90°) sono realizzate con barre size 2 passo 5" ( $\phi=6.35\text{mm}$  passo 127mm).

La modalità di prova è "*double bending*", con altezza complessiva della colonna di 96" (2438 mm) e 72" (1829 mm), rispettivamente per il campione R-1 e R-5. Le due colonne si differenziano anche per la tipologia di acciaio dell'armatura *grade 40* per R1 e *grade 60* per R-5 e le resistenze a compressione del calcestruzzo (tab.1). Il carico verticale, mantenuto costante durante la prova, è pari a 507 kN ( $\sigma_N=2.1\text{MPa}$ , ossia circa il 5% del carico limite massimo, considerando una media delle tre resistenze del calcestruzzo).

Tabella 1. Principali caratteristiche dei campioni di san Diego

	R-1	R-5
<i>steel ratio (%)</i>	2.5	2.5
<i>aspect ratio (-)</i>	2	1.5
<i>compression (MPa)</i>	-2.1	-2.1
$f_{cc}$ (MPa)	-37.9	-32.7
$f_{y,bars}$ (MPa)	317	469
$f_{y,hoops}$ (MPa)	360	324

Tabella 2. Ulteriori parametri del calcestruzzo assunti per i campioni di san Diego

	R-1	R-5
$\epsilon_{cc}$ (%)	0.25	0.22
$f_{ct}$ (MPa)	3.5	3.0
$E_c$ (GPa)	25	22
$\nu$	0.18	0.18

Mentre il primo provino ha mostrato sperimentalmente un comportamento di carattere flessionale, evidenziando solamente una minima perdita di resistenza al termine della prova, la colonna R-5 ha manifestato una chiara rottura fragile per taglio.

Ciascuna colonna è stata modellata con un elemento in "*single bending*", quindi è stata assunta una lunghezza di elemento pari alla luce di taglio. L'integrazione sulla trave viene effettuata utilizzando due sezioni di Gauss. Infatti, dato che l'altezza della sezione è pari a circa la metà della lunghezza di elemento, la scelta di questo numero di sezioni risulta la migliore; un numero maggiore di sezioni condurrebbe ad una sottostima del peso della zona dove avviene il danno. La sezione dell'elemento è stata discretizzata in 16 fibre di uguali dimensioni. L'armatura longitudinale è stata considerata nell'esatta posizione e considerando aree equivalenti di acciaio.

Per le caratteristiche dei materiali si è fatto riferimento ai valori disponibili, mentre quelli mancanti, ma necessari, per la definizione delle leggi del legame costitutivo *microplane*, sono stati ipotizzati come riportato in tabella 2.

In figura 7 è stata riportata la curva taglio-spostamento della colonna R-1 fornita dal modello con quella sperimentale. In entrambe le condizioni simulate (sia monotone che cicliche, le quali tuttavia non ripercorrono tutti i cicli effettuati nelle condizioni della prova sperimentale), si riscontra un'ottima corrispondenza della risposta. Il taglio massimo sviluppato dalla colonna (570kN) viene approssimato in maniera più che soddisfacente dal modello (545kN nel caso ciclico e 555kN nel caso monotono, in corrispondenza dello spostamento massimo della colonna, 36mm). Il modello numerico non evidenzia alcuna perdita di resistenza. Tuttavia la concordanza dei cicli di isteresi delle simulazioni cicliche, e quindi dell'energia sviluppata durante la prova sperimentale, risulta piuttosto evidente. Questo caso di studio, che potrebbe non apparire appropriato ai fini di una validazione del modello di trave con taglio, è stato invece ritenuto significativo, e pertanto proposto, in quanto dimostra come l'algoritmo non riconduca a criticità per fenomeni di taglio, laddove non presenti.

La colonna R-5 evidenzia, invece, una risposta sperimentale caratterizzata da una decisa rottura fragile per taglio. L'analisi monotona (fig. 8) rappresenta tale meccanismo in maniera molto efficace. Si nota, infatti, che successivamente allo spostamento al picco di resistenza (12 mm circa) il modello offre una improvvisa caduta di resistenza, sebbene con un leggero anticipo rispetto a quella sperimentale. Il taglio massimo sviluppato risulta leggermente inferiore a quello reale, (742 kN contro 700 kN). Mentre la resistenza residua della colonna viene perfettamente individuata.

Anche le simulazioni cicliche (fig. 8) risultano molto buone. La risposta del modello presenta la perdita di resistenza e rigidità nella fase di ricarico per raggiungere il primo spostamento imposto di segno opposto (-12 mm), mentre nella fase di carico del secondo ciclo di spostamento (17 mm), l'elemento si attesta sulla resistenza residua, determinata dal confinamento operato dalle staffe sulle fibre di calcestruzzo. Sperimentalmente il test mostra che la crisi avviene durante il primo tentativo di raggiungere lo spostamento superiore di ampiezza 17mm (e precisamente allo spostamento di 14.5mm). Tuttavia tali minime differenze risultano ampiamente accettabili.

Nel grafico di figura 9 viene riportato l'andamento delle deformazioni generalizzate della sezione di base (curvatura e deformazione di taglio), relativamente all'analisi monotona. E' ben evidente come il modello individui la criticità per taglio, infatti successivamente al raggiungimento del picco di resistenza la curvatura di sezione cessa di crescere (anzi presenta una locale fase di decrescita) per poi rimanere costante, a dispetto di un progressivo aumento della deformata di taglio (maggiormente consistente nella fase di immediato post-picco). Ciò è coerente con l'apertura di una fessura per taglio che catalizza completamente le deformazioni successive della trave.

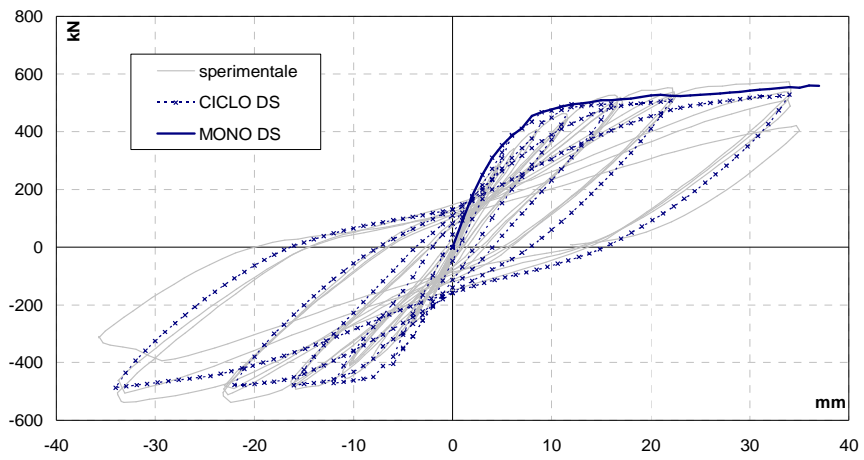


Figura 7. Confronto curve taglio-spostamento colonna R-1

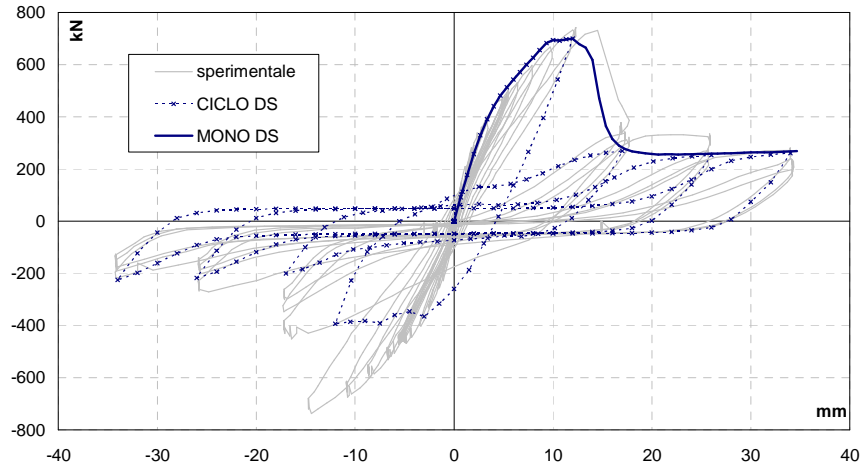


Figura 8. Confronto curve taglio-spostamento colonna R-5

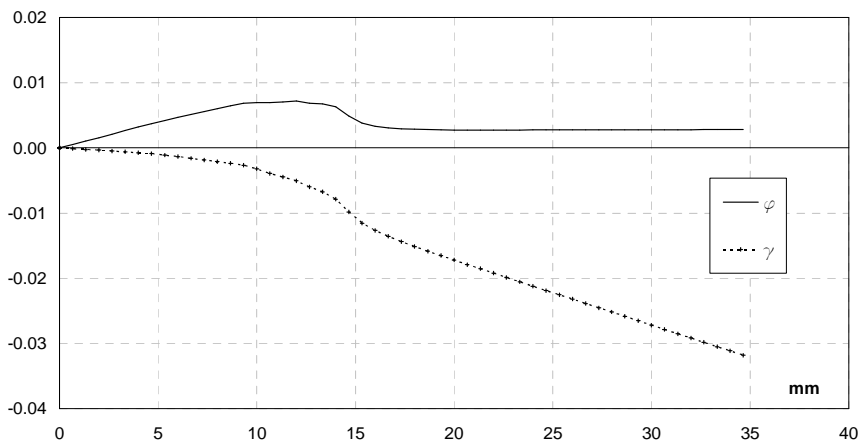


Figura 9. Deformate della sezione (curvatura e deformazione di taglio) di base colonna R-5.

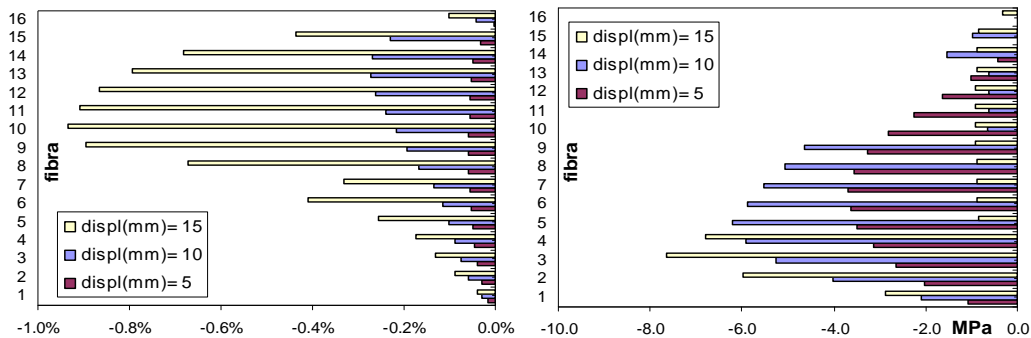


Figura 10. Deformazioni e tensioni tangenziali di fibra ( $\varepsilon_{xy}$ ,  $\tau_{xy}$ ) sulla sezione di base colonna R-5.

Infine, in figura 10, viene riportata l'evoluzione delle distribuzioni sulla sezione (relative all'analisi monotona) delle deformazioni e tensioni di fibra tangenziali. Si evidenzia l'evoluzione della forma della distribuzione delle  $\varepsilon_{xy}$ . L'approccio *dual section*, che caratterizza questo elemento di trave con taglio, determina che la richiesta di deformazione di fibra vada a concentrarsi sulla parte tesa della sezione. Ciò è determinato dalla presenza delle armature, che rappresentano il veicolo di scambio delle componenti assiali di trazione tra le due sezioni su cui è valutato l'equilibrio e genera i termini di correzioni delle distribuzioni deformative di taglio. Emerge inoltre come le fibre che maggiormente contribuiscono alla resistenza taglio della sezione siano quelle ubicate in zona compressa, coerentemente con la reale meccanica del fenomeno (l'asse neutro si muove all'altezza delle fibre 7-8).

### 3.2 Le colonne di Nagasaka

Il test ha riguardato due campioni identici ma sottoposti ad un diverso livello di compressione assiale, pari rispettivamente al 17% e 34% del carico teorico massimo. La sezione del provino è quadrata con lato da 200 mm, l'elemento misura una lunghezza complessiva di 600 mm. Le condizioni di vincolo sono "*double bending*". L'armatura verticale è costituita da 4 barre di diametro 12.7mm e quella trasversale da staffe di diametro 5.5mm, ad interasse di 35 mm. Il carico verticale imposto vale rispettivamente 147 kN per il provino denominato HPRC 10-63 e 294 kN per quello con sigla HPRC 19-32.

Anche in questo caso, l'elemento è stato schematizzato in configurazione "*single bending*" con lunghezza pari a quella di taglio, l'integrazione di elemento avviene tramite due punti di Gauss. Ogni sezione conta 10 fibre di calcestruzzo di uguali dimensioni e due di acciaio per l'armatura longitudinale, posizionate rispettivamente in corrispondenza dell'asse baricentrico dei ferri inferiori e di quelli superiori.

Tabella 3. Principali caratteristiche dei campioni Nagasaka

	<i>HPRC 10-63</i>	<i>HPRC 19-32</i>
<i>steel ratio (%)</i>	1.27	1.27
<i>aspect ratio (-)</i>	1.5	1.5
<i>compression (MPa)</i>	-3.2	-7.4
<i>f<sub>cc</sub> (MPa)</i>	-21.6	-21.0
<i>f<sub>y,bars</sub> (MPa)</i>	371	371
<i>f<sub>y,hoops</sub> (MPa)</i>	3441	344

Tabella 4. Ulteriori parametri del calcestruzzo assunti per i campioni Nagasaka

	HPRC 10-63	HPRC 19-32
$\varepsilon_{cc}(\%)$	0.17	0.17
$f_{ct}(MPa)$	2.0	2.0
$E_c(GPa)$	20	20
$\nu$	0.18	0.18

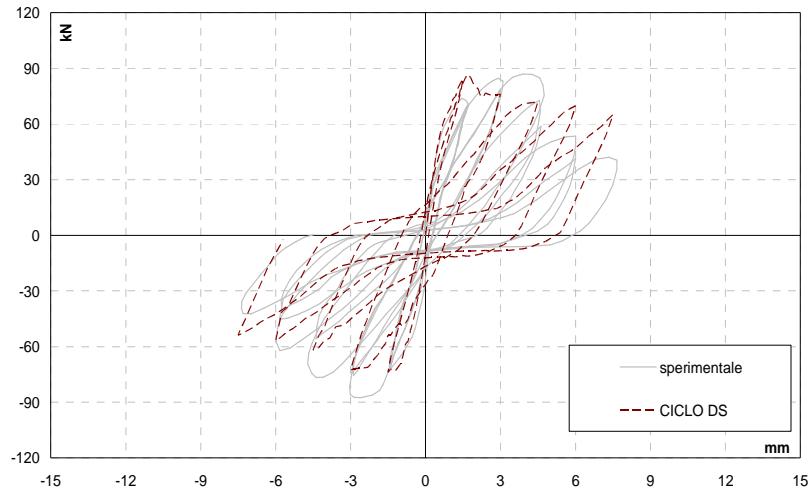


Figura 11. Confronto curve taglio-spostamento HPRC 10-69.

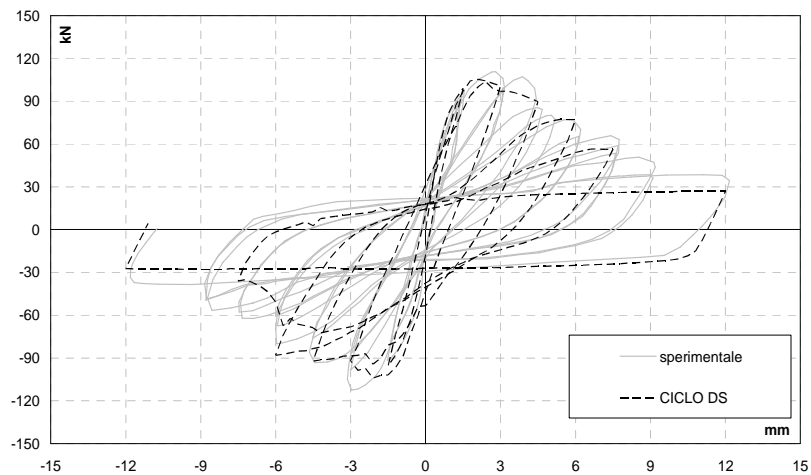


Figura 12. Confronto curve taglio-spostamento HPRC 19-32.

In figura 11 e 12 sono riportati i confronti tra le curve taglio-spostamento sperimentali ed analitici. E' possibile osservare una buona concordanza. Per il test HPRC 10-69, che presentava un carico verticale minore, si nota come il modello numerico fornisce una progressiva diminuzione di resistenza leggermente meno rapida di quella realmente mostrata, conducendo così in alcuni

momenti ad una sovrastima del taglio (in particolare al raggiungimento del primo massimo spostamento dei cicli da 6mm e 7.5mm). Mentre nel test HPRC 19-32, il modello si rivela più preciso nella stima delle resistenze e, quindi, nell'evoluzione del danneggiamento della colonna.

Il set di parametri del legame del calcestruzzo, utilizzato per i provini, appare essere più efficace nel rappresentare il degrado per taglio-compresione del calcestruzzo nel caso HPRC 19-32, dove la sezione presenta una differente parzializzazione (l'asse neutro si sposta molto più all'interno della sezione, fig.13) a causa del maggior carico verticale.

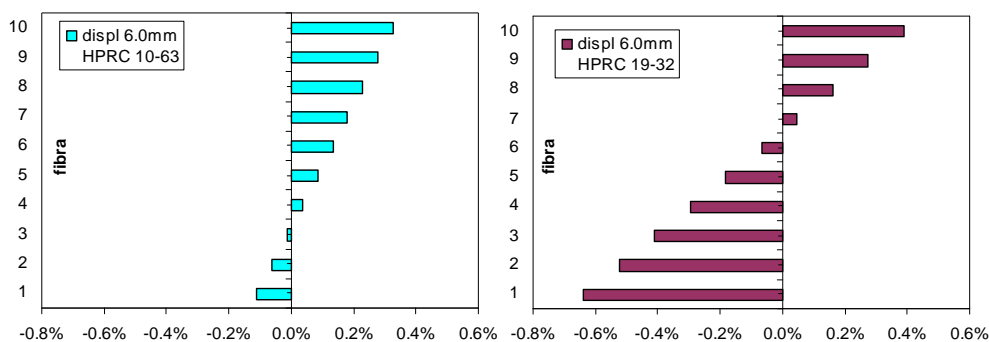


Figura 13. Confronto parzializzazione della sezione a parità di spostamento dell'elemento ( $\epsilon_{xx}$ ).

#### 4 CONCLUSIONI

L'elemento di trave con taglio *DS* si dimostra capace di rappresentare con estrema efficacia i meccanismi di crisi per taglio di elementi mono-dimensionali in cemento armato, individuando con buona precisione sia i valori di picco della resistenza sia le deformazioni di rottura, che le resistenze residue post-picco. Il modello di trave si rivela valido anche nelle situazioni in cui i meccanismi fragili per taglio hanno un ruolo secondario rispetto a quelli flessionali, proponendosi, quindi, come uno strumento affidabile per la simulazione a tutto campo della risposta di elementi in cemento armato presso-inflessi.

Appare infine doveroso sottolineare come buona parte dell'efficacia di questo modello di trave con taglio sia legata alla robustezza ed efficienza del legame costitutivo del calcestruzzo (*modello microplane*), attraverso cui è possibile rappresentare in maniera realistica la risposta del calcestruzzo nelle diverse situazioni (stati deformativi) di principale interesse nell'ambito degli elementi mono-dimensionali trave-colonna.

#### REFERENCES

- [1] Bažant, Z.P., Prat, P.C., "Microplane model for brittle plastic material. I: Theory", *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(10), 1672-1688, (1988).
- [2] Ceresa P., Pertini L., Pinho R., "Flexure-shear fiber Beam-column element for modelling frame structures under seismic loading - State of Art". *J. of Earthquake Engineering* **11**, 46-88, (2007).
- [3] Ceresa P., Petrini L., Pinho R., R. Sousa., "A fibre flexure-shear model for seismic analysis of RC-framed structures". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **38**(5), 537-586, (2009)
- [4] Gregori J.N., Sosa P.M., Prada M.A.F., Filippou F.C., "3D frame element for the analysis of

- reinforced and prestressed concrete structures subjected to shear and torsion loads". *Engineering Structures*, **29**(12), 3404-3419, (2007).
- [5] Guedes, J., Pegon, P., Pinto, A. V., "A Fibre/Timoshenko Beam Element in CASTEM2000". *Special Publication Nr. I.94.31 Applied Mechanics Unit, Safety Technology Institute, Commission of the European Communities, Joint Research Centre, Ispra Establishment, Italy* (1994).
- [6] Guedes, J., Pinto, A., "A numerical model for shear dominated bridge piers". *Proc. of the second Italian-Japan Workshop on seismic design and retrofit of bridges*, Roma (1997).
- [7] Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. "Theoretical stress-strain model for confined concrete". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**(8), 1804-1826, (1988).
- [8] Menegotto, M., Pinto E., "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending". *Proc. IABSE Symposium*. Lisbon, Portugal (1973).
- [9] Petrangeli M., Ciampi V., "Equilibrium based iterative solutions for the nonlinear beam problem". *International J. of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 423-437, (1997)
- [10] Petrangeli, M., Pinto, P.E., Ciampi, V., "Fibre element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory". *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 994-1001 (1999).
- [11] Petrangeli, M., "Fibre element for cyclic bending and shear of RC structures. II: Verification". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **125**(9), 1002-1009, (1999).
- [12] Ranzo, G., Petrangeli, M., "A fibre finite beam element with section shear modeling for seismic analysis of RC structures". *J. of Earthquake Engineering*, **2**(3), 443-473, (1998).
- [13] Ranzo, G., "Experimental and Numerical Studies on the Seismic Performance of Beam-Column RC Structural Members Subject to High Shear". *PhD Dissertation*, Facoltà di Ingegneria, Università "La Sapienza", Roma (2000).
- [14] Spacone, E., Ciampi, V., Filippou, F.C., "Mixed formulation of nonlinear beam finite element". *Computers & Structures*, **58**(1), 71-83, (1996).
- [15] Tortolini, P., Petrangeli, M., Spacone, E., "Un modello microplane modificato per la risposta del calcestruzzo nel piano". *Atti XIII Congresso ANIDIS*, Bologna, 28 giugno - 2 Luglio 2009
- [16] Tortolini, P., "L'elemento di trave non lineare con interazione M-N-V". *PhD Dissertation*, Facoltà di Architettura, Università "G.D'Annunzio" Chieti-Pescara (2011).
- [17] Vecchio, F.J., Collins, M.P., "Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using Modified Compression Field Theory". *ACI Structural Journal*, **85**, 258-268, (1988).
- [18] Xiao Y., "Steel jacket retrofit for enhancing shear strength of short rectangular reinforced concrete columns". *Report No. SSRP-92/07*, University of California, San Diego, (1993).
- [19] Taylor, A.W., Stone, W.C., "A Summary of Cyclic Lateral-Load Tests of Spiral Reinforced Concrete Columns", *Report NISTIR 5285*, National Institute of Standards and Technology, USA, (1993).
- [20] Taylor, A.W., Kuo, C., Wellenius, K., Chung, D., "A Summary of Cyclic Lateral-Load Tests on Rectangular Reinforced Concrete Columns", *Report NISTIR 5984*, National Institute of Standards and Technology, USA, (1997).
- [21] Nagasaka T., "Effectiveness of Steel Fiber as Web Reinforcement in Reinforced Concrete Columns", *Transactions of the Japan Concrete Institute*, **4**, 493-500, (1982).